



CHAPITRE I

MESURES ET INCERTITUDES

1. MESURAGE

- Quand on mesure une grandeur (ex. : épaisseur d'une feuille), on ne connaît jamais sa vraie valeur exacte, **la valeur vraie** reste inaccessible.
- **Le mesurage** est l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement l'intervalle de valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
- On donne donc un encadrement de cette valeur avec une incertitude.

L'incertitude est donc une estimation de l'erreur de mesure.

2. LES ERREURS DE MESURE

2.1 LES ERREURS ALÉATOIRES

- Quand on répète plusieurs fois une mesure, les résultats varient un peu.
- Ces différences sont appelées **erreurs aléatoires**.
- On note la moyenne des mesures \bar{x} .
- Erreur aléatoire sur une mesure, x_i : $E_{Ai} = | \bar{x} - x_i |$

Un instrument est **fidèle** si ses mesures sont proches les unes des autres donc s'il est peu sujet aux erreurs aléatoires.

2.2 ERREUR SYSTÉMATIQUE

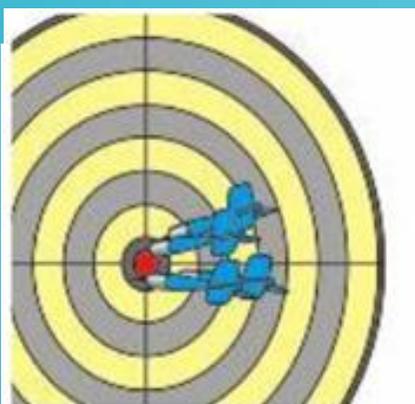
- Si l'appareil est **mal réglé** (ou mal utilisé), il donne des valeurs **fausses mais cohérentes** entre elles.
- On parle alors d'**erreur systématique**.
- Erreur systématique : $E_{RS} = |\bar{x} - x_{vrai}|$

Un instrument est **juste** si ses mesures sont proches de la valeur vraie, X_{vrai} . il commet donc une erreur systématique faible.

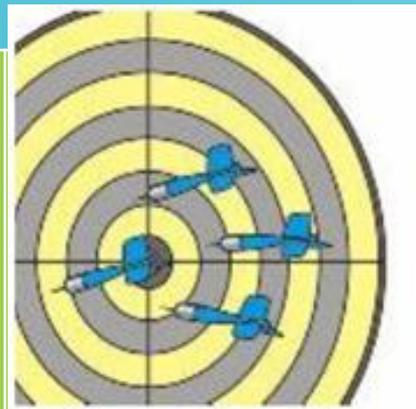
Un bon appareil de mesure est **juste et fidèle**.

L'ANALOGIE DES CIBLES

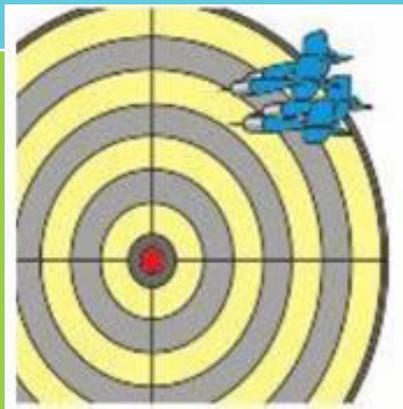
- indiquer dans ces 4 cas si l'instrument est juste et/ou fidèle :



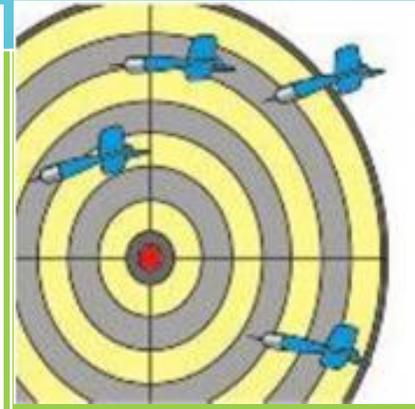
Juste et fidèle.



Juste mais pas
fidèle.



Fidèle mais pas
juste.



Ni juste ni fidèle.

3. L'INCERTITUDE

3.1 UNE ESTIMATION DE L'ERREUR DE MESURE.

- L'incertitude élargie se note U (uncertainty), elle permet de définir un intervalle de confiance dans lequel la valeur vraie a de grandes chances de se trouver.
- Une fois l'incertitude évaluée, le résultat est noté sous la forme :

$$X = X_{\text{estimé}} \pm U$$

- $X_{\text{estimé}}$ correspond à la moyenne des mesures, \bar{x} , si on a réalisé plusieurs mesures.
- Par convention, l'incertitude élargie, U , sera arrondie à la valeur supérieure avec, **au maximum, deux chiffres significatifs (souvent 1 seul)**.
- Le dernier chiffre significatif conservé pour la valeur $X_{\text{estimé}}$ est celui sur lequel porte le **dernier chiffre de l'incertitude**. Ex : $m = (55,08 \pm 0,12) \text{ g}$

3.2 INCERTITUDE TYPE ET INCERTITUDE ÉLARGIE

L'incertitude type (qui exprime un écart type) est notée u . Elle permet de quantifier la dispersion probable d'un résultat de mesure.

Elle est rangée en deux catégories :

Incertitude Type A : basée sur une méthode statistique (ex. répétition de mesures → calcul de l'écart-type).

Incertitude Type B : basée sur d'autres informations (ex. notice constructeur, expériences antérieures, jugement d'expert, etc.).

L'incertitude élargie, notée U , est destinée à couvrir un intervalle de confiance autour de la valeur mesurée.

k est le facteur d'élargissement.

$$U = k \cdot u$$

3.3 INCERTITUDE-TYPE A

- L'incertitude-type A est une incertitude **de répétabilité**.
- Lorsqu'il est possible de reproduire plusieurs fois le mesurage, on utilise des notions statistiques (moyenne et écart type) pour analyser le résultat.
- Pour n mesurages indépendants **l'écart type échantillon, ou écart type expérimental**, est donné par la relation :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (m_k - \langle m \rangle)^2}$$

- La valeur de « s » est déterminée à la calculatrice.

DÉTERMINATION DE « S » AVEC UNE CALCULATRICE

Numworks



Casio



TI



Casio collègue :



TI 83 PYTHON



- **L'incertitude-type** associée à la mesure est $u(x)$:

$$u(x) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Elle dépend du nombre n de mesures et de l'écart type échantillon.

- **L'incertitude élargie** associée à la mesure est $U(x)$:

$$U(x) = k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Elle dépend du nombre n de mesures, de l'écart type échantillon et d'un coefficient k appelé facteur de d'élargissement.

- Le facteur d'élargissement, k , dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance. Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student ».

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

EXERCICE 1 :

On donne une série de mesures correspondant à la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier, notée l :

Mesures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l en cm	0,010	0,010	0,012	0,009	0,010	0,008	0,009	0,011	0,010	0,012	0,008	0,009

1. Déterminer la moyenne de l'ensemble de ces valeurs, \bar{l} , le nombre de valeurs, n , ainsi que l'écart type échantillon, s .
2. Déterminer l'incertitude type A de mesure, notée $u(x)$.
3. Calculer l'incertitude élargie $U(x)$ associée à la mesure de l'épaisseur de la feuille avec un niveau de confiance de 99%.
4. Écrivez le résultat de mesure avec son incertitude.

RÉPONSE :

- Détermination de s à la calculatrice : $s = 1,337 \cdot 10^{-3}$ cm
- La valeur moyenne des mesures est $\bar{l} = 9,8 \cdot 10^{-3}$ cm
- Détermination du coefficient de Student (niveau de confiance 99% et $n = 12$ mesures) $k = 3,11$

- Calcul de $u(l)$: $u(l) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1,337 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{12}} = 3,859 \cdot 10^{-4}$ cm

- Calcul de $U(l)$: $U(l) = k_{99} \times u(l)$

$$= 3,11 \times 3,859 \cdot 10^{-4} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

- On a :

$$l = 9,8 \cdot 10^{-3} \pm 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

3.4 INCERTITUDE SUR UNE MESURE UNIQUE.

- Il s'agit d'une incertitude-type B.
- L'incertitude-type élargie sur une mesure unique est déterminée à partir d'une incertitude donnée pour l'appareil notée u .
- Dans la majorité des cas on ne retient que deux facteurs d'élargissement, k .

Niveau de confiance	k
68 %	1
95%	2
99%	3

• L'incertitude élargie est :

$$U = k.u$$

3.3 INCERTITUDES DE TYPES B SUIVANT LES CAS

Cas	Incertitude type
<p>Indicateur numérique (exemple : balance numérique) pour lequel on ne connaît que la résolution, notée b.</p> <p>La résolution d'un appareil de mesure numérique est la plus petite mesure (non nulle) qui peut être affichée par l'appareil. Elle peut être donnée ou déterminée à partir de ce qu'affiche l'appareil.</p>	$u = \frac{b}{\sqrt{12}}$
<p>Appareil analogique (cadran...)</p>	<p>Simple lecture : $u_{\text{lecture}} = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$</p>
<p>Appareil analogique à double lecture (règle...)</p>	<p>Double lecture : $u_{\text{lecture}} = \sqrt{2} \times \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$</p>
<p>Appareil numérique (ampèremètre, Voltmètre...) pour lequel on peut calculer la précision, Δ, à partir d'une notice.</p> <p>La précision, Δ, se calcule souvent à partir d'un pourcentage de la valeur mesurée et de digits.</p> <p>Le mot digit ou quantum représente la plus petite variation possible de l'affichage.</p>	$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$
<p>Instrument pour lequel une tolérance ou précision constructeur, notée $\pm a$, est donnée (Pipette jaugée...)</p>	$u = \frac{a}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 2

Un voltmètre affiche la valeur $U = 8,05 \text{ V}$,

Sur la notice, il est indiqué : « Précision, toutes gammes : $\pm 0,5\%$ de la valeur affichée + 1 digit ».

1. Déterminer la valeur de la précision, a , à l'aide de la formule donnée.
2. Déterminer l'incertitude-type B, u .
3. En déduire l'incertitude élargie pour un intervalle de confiance de 95%.

EXERCICE 2

Attention : dans cet exercice, la lettre « U » est à la fois utilisée pour la tension et l'incertitude élargie.

1. $U = 8,05 \text{ V}$ donc un digit représente $0,01 \text{ V}$ (une unité de la plus petite valeur affichée).

Détermination de la précision :

$$a = \frac{0,5}{100} \times 8,05 + 0,01 = 0,05 \text{ V}$$

2. Détermination de l'incertitude type : $u = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,029 \text{ V}$

3. Détermination de l'incertitude élargie.

$$U = k \cdot u = 2 \times 0,029 = 0,06 \text{ V (après arrondi)}$$

On écrit donc la valeur de la tension :

$$U = 8,05 \pm 0,06 \text{ V}$$

3.5 INCERTITUDE RELATIVE

- L'incertitude relative, notée I_r , donne la précision d'une mesure.
- Elle n'a pas d'unité, s'exprime souvent en pourcentage et est donnée la plupart du temps avec un seul chiffre significatif.

$$I_r = \frac{U}{|x_{estimé}|}$$

- Exemple : $m = 12,5 \pm 0,2$ kg
- Calculer l'incertitude relative associée à cette mesure.

RÉPONSE :

- Exemple : $m = 12,5 \pm 0,2$ kg
- L'incertitude relative de cette mesure est :

$$I_r = \frac{0,2}{12,5} = 0,016 \text{ soit } 1,6\%.$$

4. COMPARER LE RÉSULTAT AVEC UNE VALEUR DE RÉFÉRENCE

4.1 L'ÉCART RELATIF

- Si le résultat de la mesure ou du calcul est fourni avec son incertitude, alors la mesure est satisfaisante si son intervalle de confiance englobe la valeur de référence.
- Si le résultat de la mesure ou du calcul est fourni sans son incertitude, il est possible de calculer l'écart relatif entre la valeur obtenue et la valeur de référence.

$$e_{\text{relatif}} = \left| \frac{X_{\text{obtenue}} - X_{\text{ref}}}{X_{\text{ref}}} \right|$$

- La mesure est d'autant plus satisfaisante que cet écart relatif est petit.

4.2 DÉTERMINER UN Z-SCORE

- Le z-score permet de vérifier la compatibilité de la mesure obtenue avec une valeur de référence.

$$z = \left| \frac{X_{mesuré} - X_{ref}}{u(x)} \right|$$

- Si $z > 2$, il y a incompatibilité : la mesure n'est pas jugée convenable au regard de la référence.
- Si $z < 2$, il y a compatibilité : la mesure est jugée compatible avec la valeur de référence.

EXERCICE 3

Un multimètre numérique affiche une tension $U_{AB} = 3,00 \text{ V}$.

Sur la notice, il est indiqué : « Précision : 1% de la valeur affichée + 2 digits ».

1. Déterminer la valeur de la précision, α , à l'aide de la formule donnée.
2. Déterminer u l'incertitude-type B associée à cette mesure.
3. En déduire l'incertitude élargie pour un intervalle de confiance de 95%.
4. Considérant une valeur de référence de tension $U_{ref} = 3,10 \text{ V}$, calculer le z-score associé à cette mesure et conclure.



FIN