# MOUVEMENTS DANS UN CHAMP UNIFORME

# 1. MOUVEMENTS D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

## 1.1 LANCER UN PROJECTILE

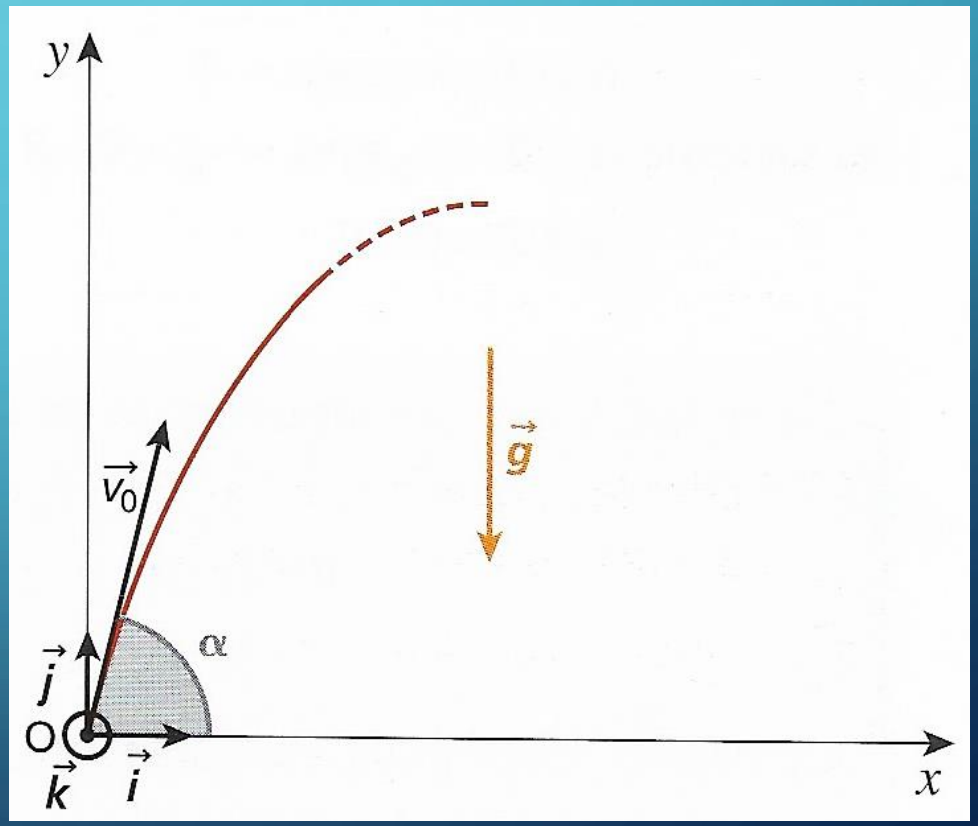
On étudie le lancement d'un projectile dans le référentiel terrestre. Il est lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à la date t = 0.

On se limitera à suivre son centre d'inertie, G, dans le champ de pesanteur terrestre supposé être uniforme et en négligeant l'action de l'air par rapport à l'effet de son poids.

Le plan (Oxy) est appelé plan de tir. O est la position initiale du centre de gravité G.

Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont :

$$\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$



# 1.2 BILAN DES FORCES ET APPLICATION DE LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON

Compte tenu des approximations, le projectile ne subit qu'une seule force, son poids.

La deuxième loi de Newton s'écrit donc : $\vec{P} = m\vec{a}$ soit $m\vec{g} = m\vec{a}$

Le projectile n'est soumis qu'à son poids, il est en chute libre.

L'accélération du centre d'inertie d'un solide en chute libre est égale au vecteur champ de pesanteur : $\vec{a} = \vec{g}$

L'accélération et donc le mouvement ne dépendent pas de la masse du système.

# 1.3 VECTEUR VITESSE INSTANTANÉE $\vec{v}$(t)

On a $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ et $\vec{g} = -g\,\vec{j}$, la deuxième loi de Newton conduit à :

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

En intégrant ces équations, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse :

(A, B et C sont des constantes d'intégration)

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \\ v_z(t) = C \end{cases}$$

# DÉTERMINATION DES CONSTANTES D'INTÉGRATION :

À t = 0, $\vec{v} = \overrightarrow{v_0}$

$$\vec{v}(0)\begin{cases} v_x(0) = \quad v_{0x} = v_0 cos\alpha = A \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 sin\alpha = -gt + B \\ v_z(0) = \quad 0 \quad = C \end{cases}$$

il vient : $\begin{cases} A = v_0 cos\alpha \\ B = v_0 sin\alpha \\ C = 0 \end{cases}$

On obtient donc les coordonnées du vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0 cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

La vitesse horizontale est constante : le mouvement horizontal est uniforme.

Le mouvement vertical est uniformément accéléré car l'accélération est constante.

# EXERCICE D'APPLICATION 1

Un projectile est lancé avec une vitesse $v_0 = 20\ m.s^{-1}$ et un angle $\alpha = 30°$. Calculer sa date d'arrivée $t_s$ au sommet S de la trajectoire ainsi que sa vitesse horizontale en ce point.

Aide : lorsqu'il est au sommet de sa trajectoire, le projectile a une vitesse verticale nulle : $v_y = 0\ m.s^{-1}$.

# RÉPONSES :

Un projectile est lancé avec une vitesse $v_0 = 20\ \text{m.s}^{-1}$ et un angle de $\alpha = 30°$. Calculer la date d'arrivée au sommet S de sa trajectoire et sa vitesse en ce point. À la date $t_S$ d'arrivée au sommet, la vitesse verticale du projectile est nulle : $v_y(t_S) = 0$.

Ceci s'écrit $-gt_S + v_0 \sin\alpha = 0$, ce qui donne : $t_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

La date d'arrivée au sommet est donc :

$$t_S = \frac{20 \times \sin(30°)}{9{,}8} = 1{,}0\ \text{s}.$$

Au sommet, le mouvement du projectile n'est qu'horizontal.
Sa vitesse est alors $v_S = v_x = v_0 \cos\alpha$. Cela donne $v_S = 20 \times \cos(30°) = 17\ \text{m.s}^{-1}$.

# 1.4 VECTEUR POSITION $\overrightarrow{OG}$(t)

- Sachant que $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)$ on obtient également les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{OG}$ par intégration par rapport au temps :

- $\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t) = v_0\ cos\alpha \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t) = -gt + v_0 sin\alpha \\ v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t) = 0 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t + D \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + E \\ z(t) = F \end{cases}$

D,E et F sont des constantes d'intégration.

## DÉTERMINATION DES CONSTANTES D'INTÉGRATION : À t = 0, $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ (G ET O SONT CONFONDUS).

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} 0 = (v_0 cos\alpha)t + D \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + E \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

il vient $\begin{cases} D = 0 \\ E = 0 \\ F = 0 \end{cases}$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Puisque z(t) = 0, le mouvement se déroule dans le plan de tir (Oxy).

# EXERCICE D'APPLICATION 2 :

Donner l'expression littérale de la date $t_p$ à laquelle le projectile retombe au sol. Comparer cette expression avec celle obtenue pour $t_s$ dans l'exercice d'application précédent.

Aide : à cette date, on a bien entendu $y(t) = 0$.

# RÉPONSES :

**À quelle date un projectile retombe-t-il au sol ?**

Le point de retombée au sol, noté P, a pour ordonnée $y = 0$.

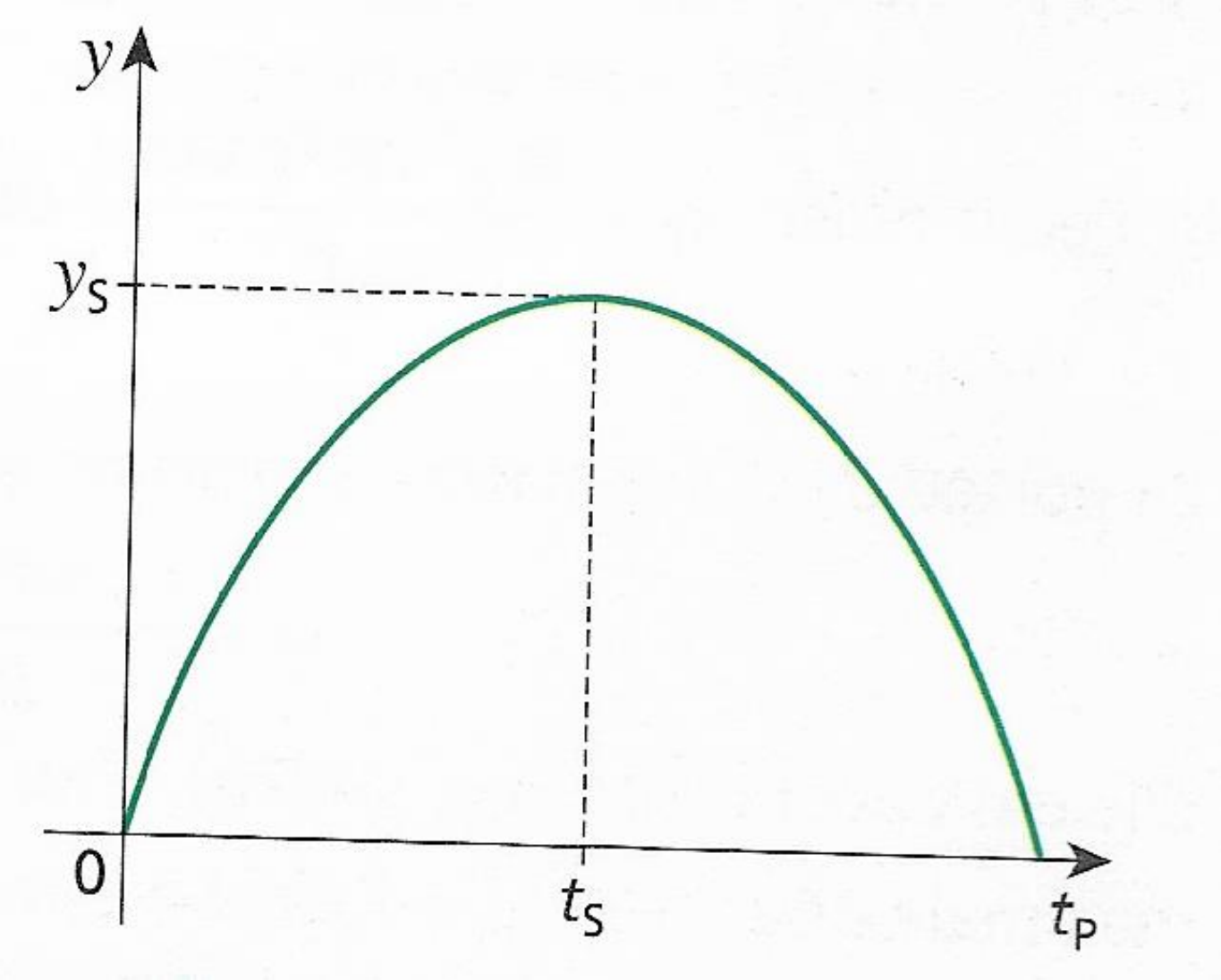
La date $t_P$ **(Fig. 4.b.)** d'arrivée au sol est donc solution de l'équation $y(t) = 0$, soit $-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t = 0$, qui s'écrit $t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin\alpha\right) = 0$

La première solution $t = 0$ correspond au point de lancer O : ce n'est pas celle qui est recherchée.

La deuxième solution est bien la date d'arrivée $t_P$ du projectile en P : $t_P = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. C'est le double de $t_S$, ce qui signifie que la durée de montée du projectile est égale à la durée de descente.

# Y EN FONCTION DU TEMPS.

## REMARQUE : CETTE COURBE NE REPRÉSENTE PAS LA TRAJECTOIRE.



# 1.5 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA TRAJECTOIRE

À partir des équations horaires, on peut déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.

On a $x = (v_0 cos\alpha)t$ soit $t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$ .

En remplaçant cette expression dans l'équation horaire de y, il vient :

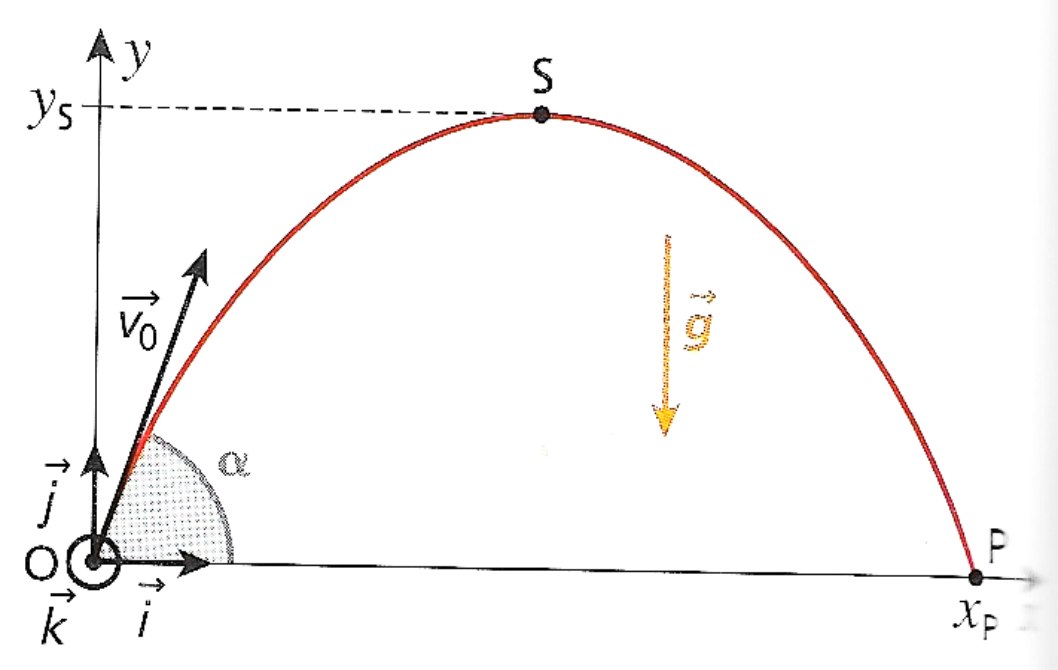
$$y = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 cos\alpha})^2 + (v_0 sin\alpha)\frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

L'équation de la trajectoire est donc :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\ cos^2\alpha}x^2 + (tan\alpha)\ x$$

Il s’agit d’une parabole, dans le plan de tir, incurvée vers le bas.

S est le sommet de la trajectoire, et P (d’abscisse $x_P$) est le point d’arrivée.



# 1.6 CARACTÉRISTIQUES DE LA TRAJECTOIRE

## LA FLÈCHE

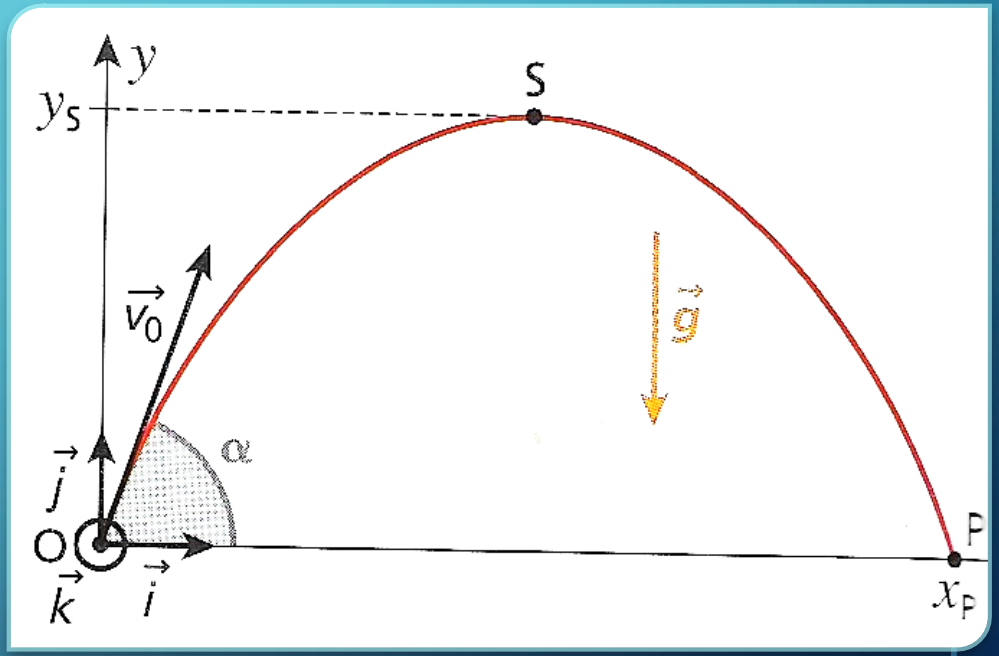
Le sommet est atteint à la date $t_s = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$,

lorsque $v_y\ (t) = 0$.

En introduisant $t_s$ dans y(t) on obtient :

$$y_s = -\frac{1}{2} g (\frac{v_0 sin\alpha}{g})^2 + (v_0 sin\alpha) \frac{v_0 sin\alpha}{g}$$

soit : $y_s = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 sin^2 \alpha}{g}$



# LA PORTÉE

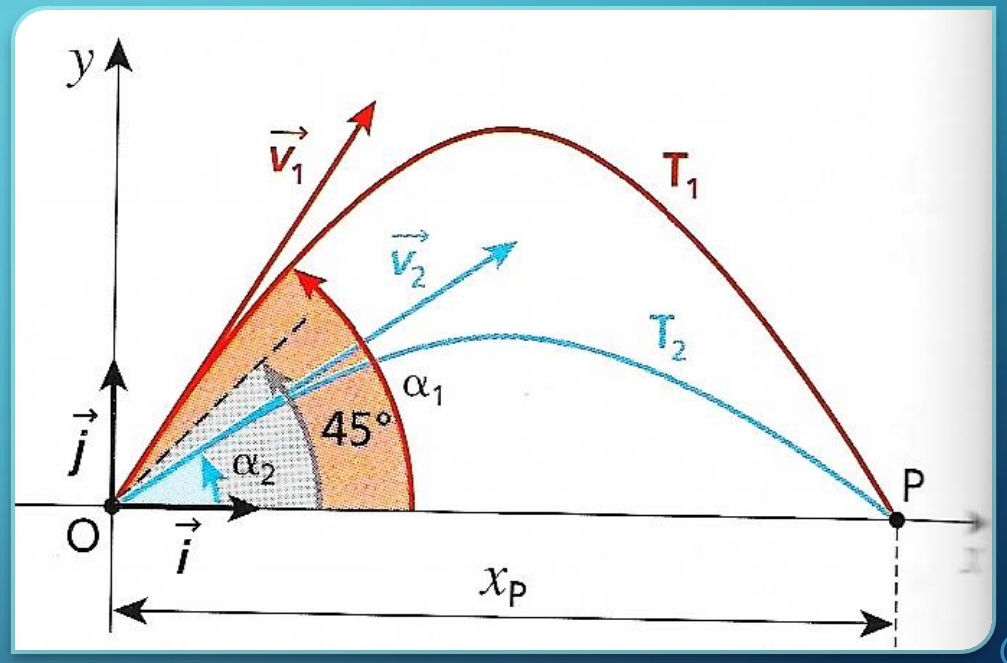
La portée est l'abscisse $x_p$ du point P dont l'ordonnée est nulle ($y_p = 0$).

On pose donc y = 0

soit $0 = -\frac{g}{2v_0^2\,cos^2\alpha}x^2 + (tan\alpha)\,x$

Cette équation admet deux

solutions : x = 0 et $x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$



## 2. CAS DE LA CHUTE LIBRE
## 2.1 CHUTE LIBRE VERTICALE SANS VITESSE INITIALE

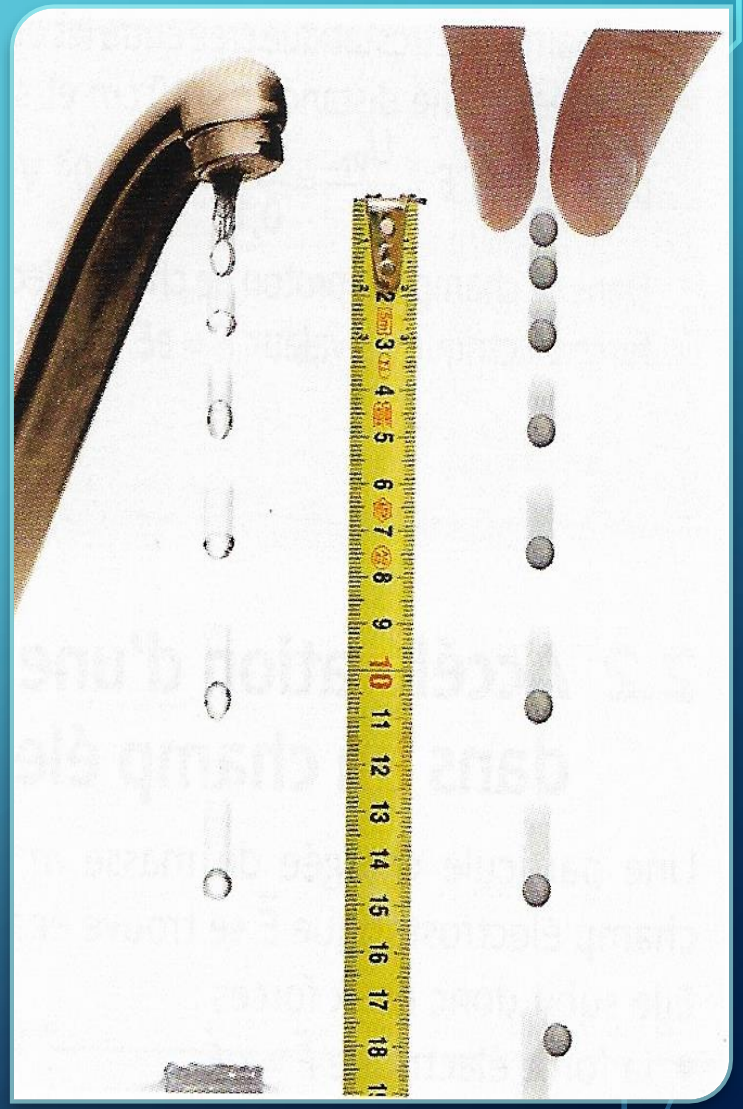
Lorsque la vitesse initiale est nulle ($v_0 = 0$), le projectile est en chute libre verticale.

Seul l'axe Oy est utile vu que l'accélération est verticale.

En l'absence de frottements on obtient :

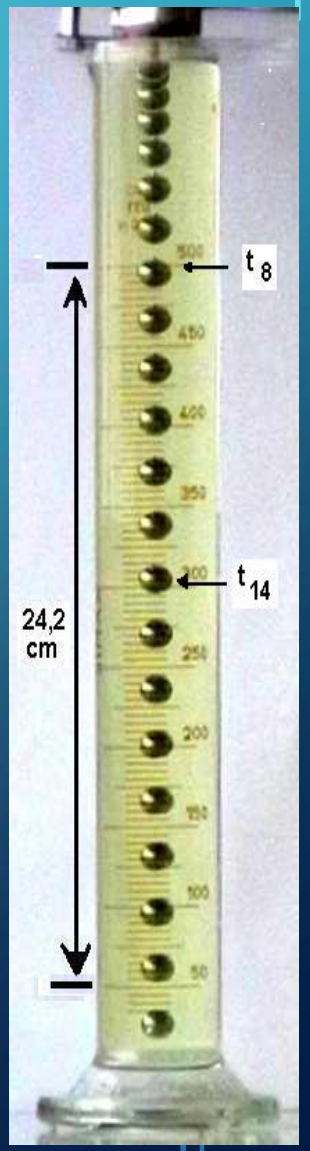
$$V_y(t) = -gt \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Y_0$$

où $Y_0$ représente l'altitude initiale.



# 2.2 CHUTE LIBRE VERTICALE AVEC FROTTEMENT VISQUEUX

On considère la chute d'une bille dans un fluide visqueux. Par exemple, la chute d'une bille, Dans de la glycérine comme sur la chronophotographie ci-contre.
On remarque que le mouvement se décompose en une phase d'accélération initiale, le régime transitoire, et d'une phase de mouvement uniforme, le régime permanent.




Référentiel : terrestre. Système : la bille

Caractéristiques de la bille :

Masse : m Volume : $V_b$ Masse volumique : $\rho_b$ . On a donc : $m = \rho_b V_b$

Caractéristiques du fluide :

Masse volumique : $\rho_f$

La masse de fluide déplacé intervenant dans la poussée d'Archimède, est donc :

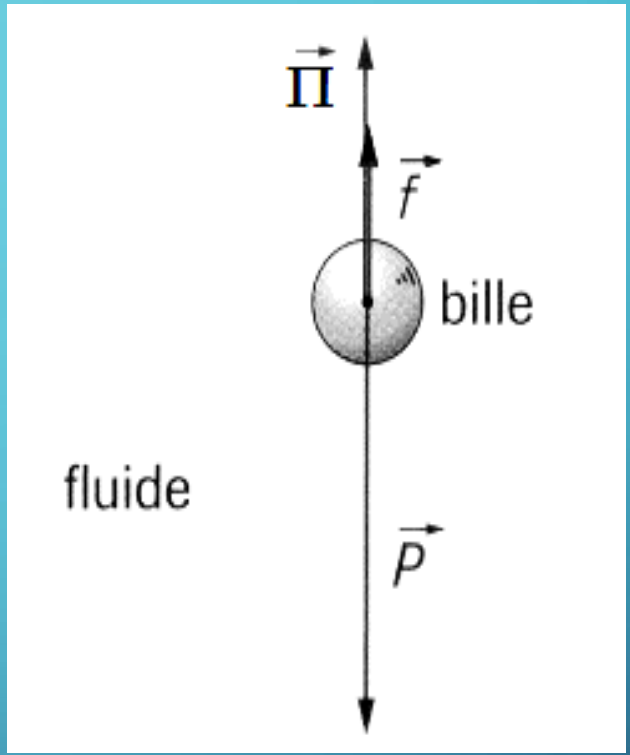
$m_f = \rho_f V_b$

# 2.2.1 BILAN DES FORCES

Les forces appliquées sur la bille sont :

Le poids de la bille : $\vec{P}\begin{cases} 0 \\ -mg \\ 0 \end{cases}$

La poussée d'Archimède : $\vec{\pi}\begin{cases} 0 \\ \rho_f V_b g \\ 0 \end{cases}$




Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -v(t) \\ v_z = 0 \end{cases}$$

La force de frottement fluide : $\vec{f}\begin{cases} 0 \\ -kv_y = kv(t) \\ 0 \end{cases}$ où k est un facteur de proportionnalité et $v_y$ la vitesse verticale de la bille ($v_y < 0$ puisque la bille chute et $-kv_y > 0$)

# 2.2.2 DEUXIÈME LOI DE NEWTON

L'application de la deuxième loi de Newton donne : $\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\vec{a}$ avec

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt}(t) = -\frac{dv}{dt}(t) \\ a_z = 0 \end{cases}$$ puisque le mouvement est vertical.

La projection sur l'axe vertical de la deuxième loi de Newton donne :

$$-mg + \rho_f V_b g + kv = -m\frac{dv}{dt}$$

# 2.2.3 EQUATION DIFFÉRENTIELLE VÉRIFIÉE PAR LA VITESSE

Il vient : $\mathrm{m}\,\frac{dv}{dt} + kv = \mathrm{m\,g} - \rho_f V_b g$

On divise par m : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho_f V_b}{m} g$

Pour simplifier l'équation, on pose : $\tau = \frac{m}{k}$ et $\alpha = g\left(1 - \frac{\rho_f V_b}{m}\right) = g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b})$

Expression finale de l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \alpha$

Soit $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v + \alpha$

# 2.2.4 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Math / équation différentielle du type y'=ay + b

Solution du type y(t) = C $e^{at}$- $\frac{b}{a}$ où C est une constante

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre constant. Sa solution générale est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière.

L'équation $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v + \alpha$ admet donc pour solution

$$v(t) = C\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha\tau$$

## SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :

$$v(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha\tau$$

Détermination de la constante C :

À t = 0 on a $v(t) = 0$ donc : $0 = Ce^{-\frac{0}{\tau}} + \alpha\tau \Leftrightarrow 0 = C + \alpha\tau \Leftrightarrow C = -\alpha\tau$

D'où $v(t) = -\alpha\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha\tau \Leftrightarrow v(t) = \alpha\tau\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Avec $\tau = \frac{m}{k}$ et $\alpha = g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b})$

# 2.2.5 RÉGIME PERMANENT

Ce régime intervient lorsque la phase d’accélération initiale (le régime transitoire) est terminée.

# VITESSE LIMITE :

On note $v_{lim} = \lim_{t\to\infty} \alpha\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \alpha\tau = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b})$

Il s'agit de la vitesse obtenue en régime permanent, le mouvement est alors rectiligne uniforme avec $v_{lim} = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b})$

On peut établir simplement l'expression de la vitesse limite de la manière suivante :

Puisqu'en régime permanent le mouvement est rectiligne uniforme, l'accélération est nulle.

La deuxième loi de Newton peut donc s'écrire : -mg + $\rho_f V_b g + k v_{lim} = 0$

Soit $k v_{lim}$ = mg - $\rho_f V_b g$ et $v_{lim} = \frac{m}{k} g \left(1 - \frac{\rho_f V_b}{m}\right) = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b})$

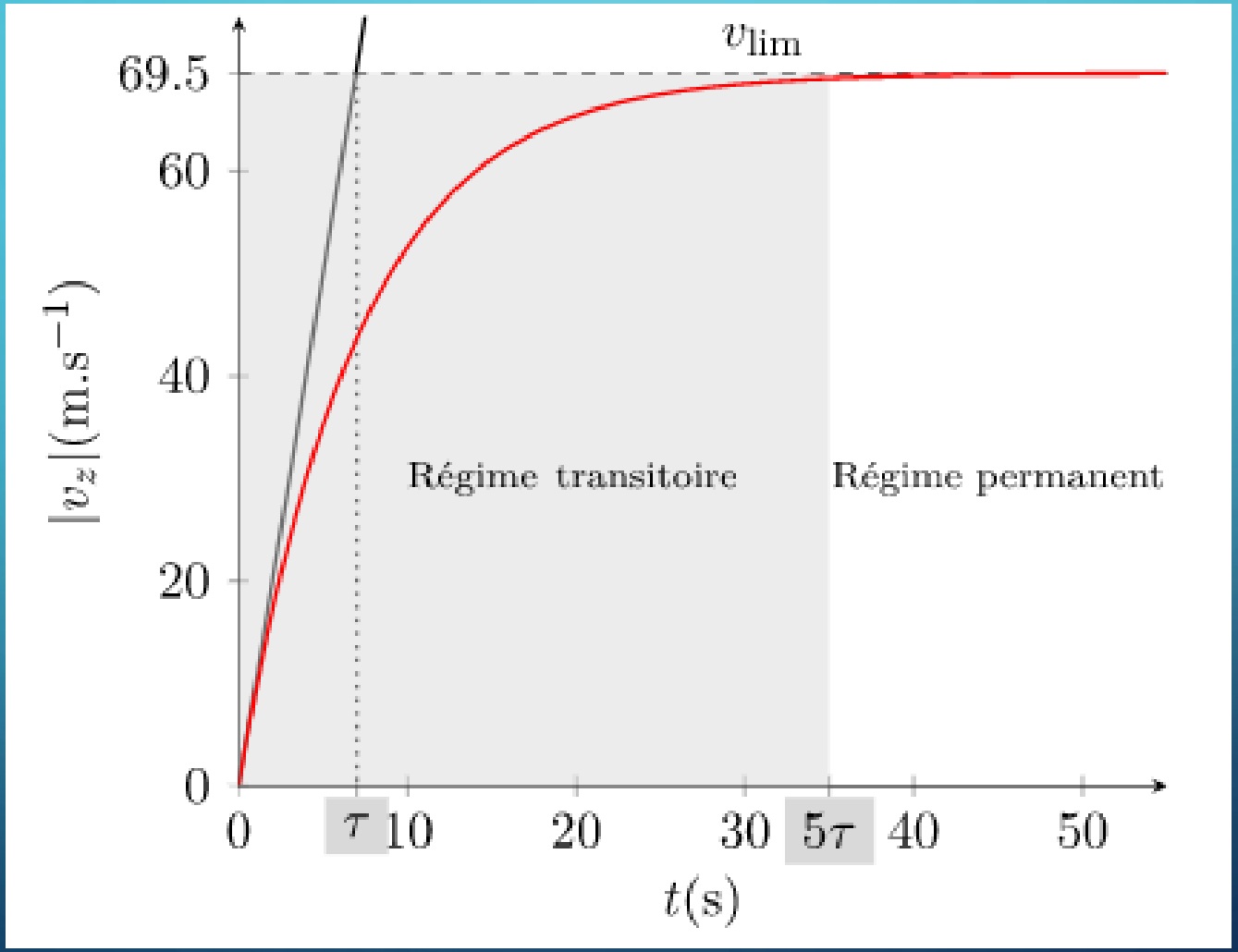
# TEMPS CARACTÉRISTIQUE :

On peut considérer que le régime permanent est atteint lorsqu'une durée égale à 5τ s'est écoulée.

Au bout d'une durée τ, la vitesse de la bille est de 63% de la vitesse limite, au bout de 5τ elle est de 99% de cette vitesse.

τ est appelé le temps caractéristique : $\tau = \frac{m}{k}$

# DÉTERMINATION GRAPHIQUE DU TEMPS CARACTÉRISTIQUE SUR LA COURBE V = F(T)

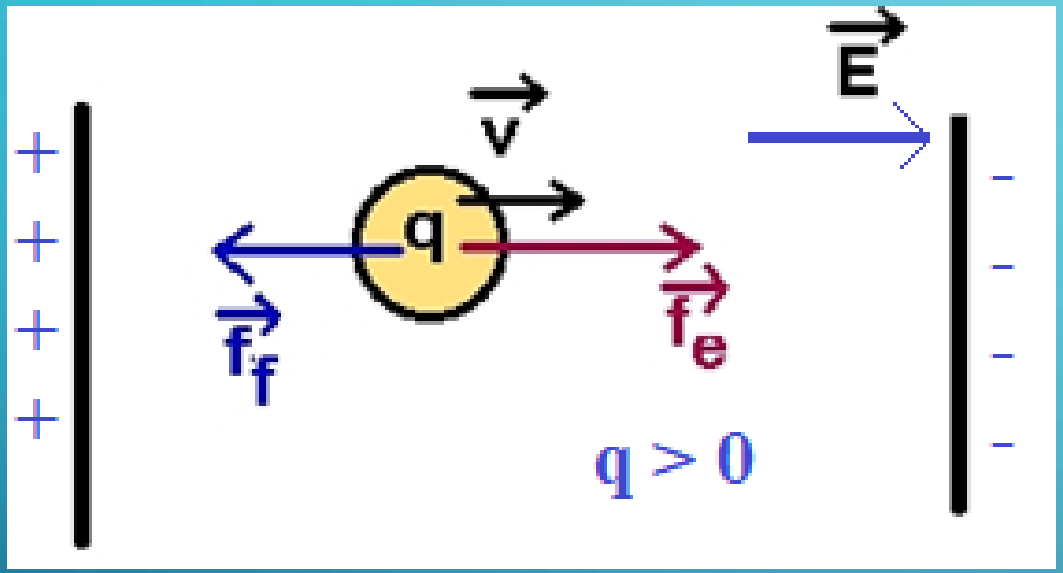


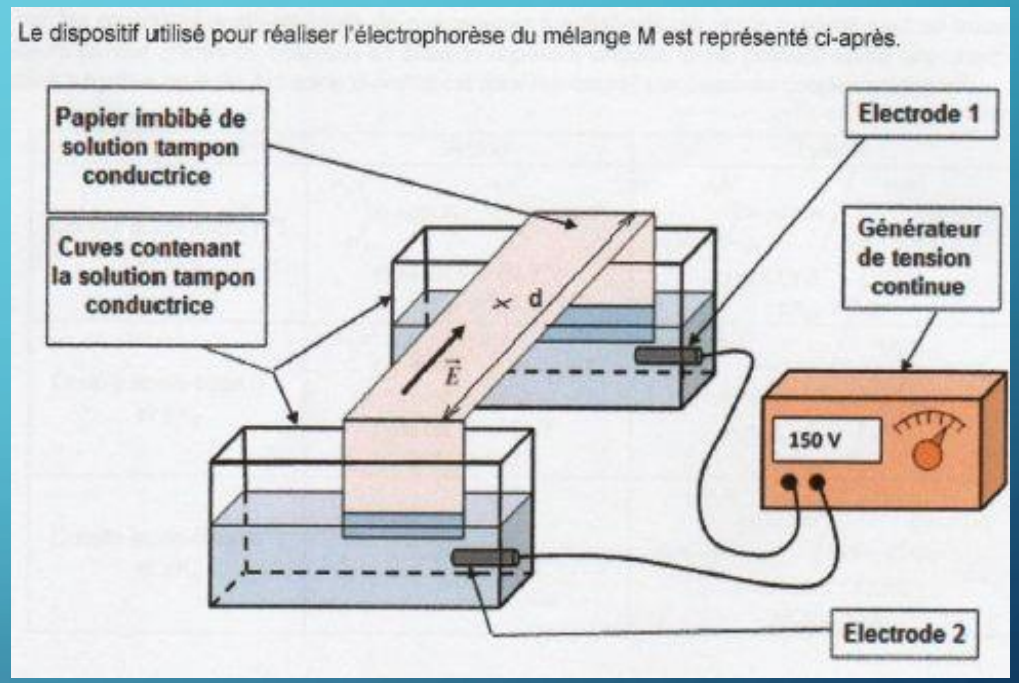
# 3. CAS DE L'ÉLECTROPHORÈSE

L'électrophorèse est — avec la chromatographie — la principale des techniques utilisées en biologie pour la séparation et la caractérisation d'espèces. Elle a quelques applications en chimie, mais est principalement utilisée en biochimie ou biologie moléculaire pour la séparation des protéines ou des acides nucléiques.

La technique de l'électrophorèse est fondée sur le déplacement d'ions (espèces chargées positivement ou négativement) sous l'effet d'un champ électrique. Du fait de leurs caractéristiques propres et en fonction des conditions de l'électrophorèse ces ions auront des vitesses de migration différentes, ils vont donc se séparer les uns des autres.

Les cations migrent vers l'électrode négative et les anions se déplacent vers l'électrode positive.




Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = v(t) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

# 3.1.1 BILAN DES FORCES

Prenons le cas d'un cation, comme dans le schéma ci-dessus.

Le poids des ions ainsi que la poussée d'Archimède sont négligeables devant les autres forces.

Il reste : La force électrostatique $\overrightarrow{f_e}\begin{cases} qE \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

et la force de frottement fluide $\overrightarrow{f_f}\begin{cases} -kv_x = -kv(t) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

# 3.1.2 EXPRESSION DE LA VITESSE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Comme dans le cas de la chute dans un fluide visqueux, le mouvement se découpe en un régime transitoire (accélération) et un régime permanent (mouvement rectiligne uniforme).

Expression de la seconde loi de Newton pour un mouvement rectiligne uniforme : $\boxed{\overrightarrow{f_e} + \overrightarrow{f_f} = \mathrm{m}.\,\vec{a}}$

En projection sur l'axe Ox, on obtient : $\boxed{qE - kv = \mathrm{m}.a_x}$

Avec : $\vec{a}(t) \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt}(t) = \frac{dv}{dt}(t) \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$

# RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On en déduit l'équation différentielle suivante :

$qE - kv = \mathrm{m}.\frac{dv}{dt}$ soit $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + \frac{qE}{m}$

Math / équation différentielle du type y'=ay + b

Solution du type y(t) = C $e^{at}$- $\frac{b}{a}$ où C est une constante

La solution de cette équation différentielle est donc : $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{qE}{k}$

À t = 0 on a v(0) = 0 donc 0 = C + $\frac{qE}{k}$ on en déduit C = - $\frac{qE}{k}$

L'expression de la vitesse au cours du régime transitoire est donc :

$$v(t) = \frac{qE}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

# 3.1.3 EXPRESSION DE LA VITESSE EN RÉGIME PERMANENT

Le mouvement est devenu rectiligne uniforme.

On a donc $v(t) = v_{lim}$

Expression de la première loi de Newton pour un mouvement rectiligne uniforme : $\overrightarrow{f_e} + \overrightarrow{f_f} = \vec{0}$

En projection sur l'axe Ox, on obtient : $qE - kv_{lim} = 0$

Il en résulte $$v_{lim} = \frac{qE}{k}$$

Remarque : D'après la loi de Stokes k = $6\pi\eta r$ où $\eta$ représente la viscosité dynamique du fluide (Pa.s) et r le rayon de l'ion supposé sphérique.

Dans le cas d'un anion, les vecteurs représentant les forces ainsi que celui de la vitesse seraient tous de direction opposée, mais la valeur de la vitesse limite serait la même.

# FIN