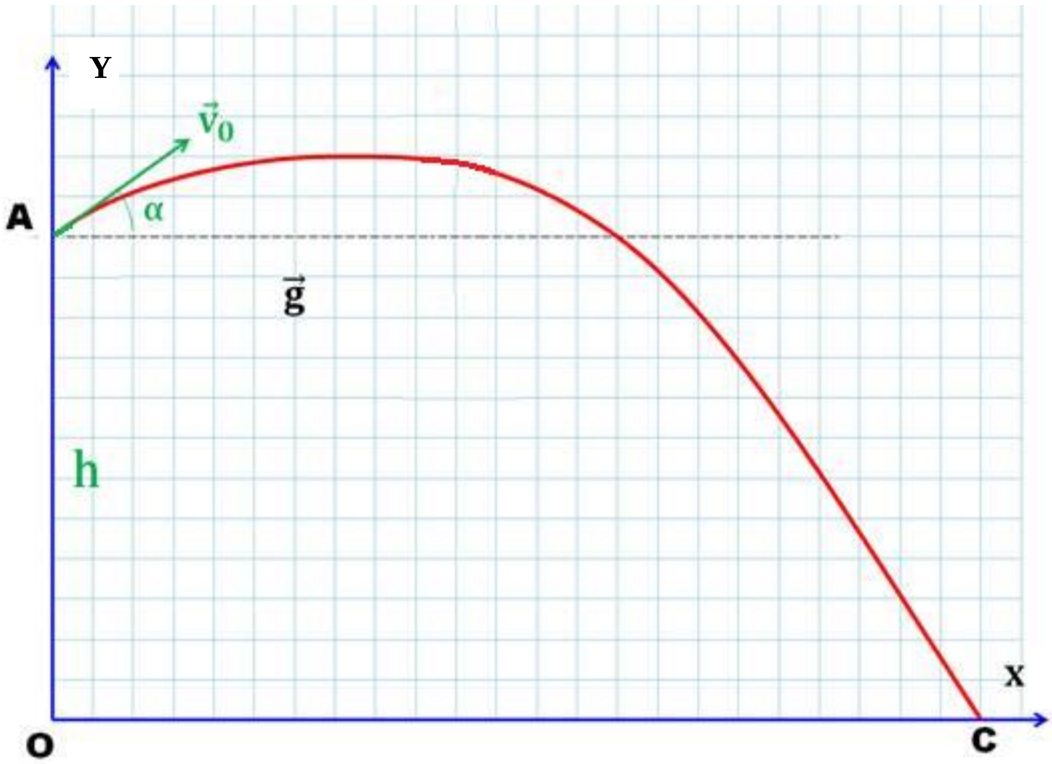
Exercice n°2

Au cours de la bataille du fort de Helm, Légolas est posté sur un rempart face à l'ennemi. Les orcs approchent en rangées serrées. L'elfe ne vise pas n'importe lequel d'entre eux, c'est le chef Uruk-haï Groulouk qu'il veut atteindre. Pour que sa flèche puisse percer la brigandine ensorcelée de l'orc, elle soit avoir une vitesse d'impact supérieure à 90 $m.s^{-1}$. Les flèches enchantées qu'emploie Légolas ignorent les frottements de l'air et la poussée d'Archimède.

Lorsqu'il lâche sa flèche, Légolas est au point A, sur le rempart. Légolas est un archer expert, il n'est pas du genre à rater sa cible, il atteint Groulouk au point C, malgré le fait que Groulouk soit en train de ramper. Au moment du tir, sa flèche a une vitesse initiale V_0 et fait un angle α avec l'horizontale.



Données : v_0 = 80 $m.s^{-1}$ (bonus elfiques inclus !) ; α = 20° ; h = 15 m. g = 9.8 $m.s^{-2}$. (Oui, sur Arda, donc sur la Terre du milieu aussi…)

1. Etablir les équations horaires relatives au vecteur vitesse de la flèche.
2. Etablir les équations horaires relatives au vecteur position de la flèche.
3. A quelle distance de O se trouve Groulouk, lorsque la flèche le touche ? On admettra que l'altitude de la flèche est nulle à cet endroit.
4. La flèche parvient-elle à transpercer la brigandine du chef orc ?

Corrigé

Pour tout l'exercice, on travaillera dans un repère Oxy. On nomme G le centre du boulet.

1. Etablir les équations horaires relatives au vecteur vitesse de la flèche.

   Le système (la flèche enchantée) est un projectile évoluant dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids.

   Application de la seconde loi de Newton : $\vec{P}$ = m.$\vec{a}$
   Il vient : m. $\vec{g}$ = m.$\vec{a}$ et $\vec{g} = \vec{a}$

Etablissement des équations horaires :

Vecteur accélération : $\vec{a}(t)$ $\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \end{cases}$

On obtient les coordonnées du vecteur vitesse par intégration :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = A \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -gt + B \end{cases}$$

Détermination des constantes A et B
A t = 0 $\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0}$ soit

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = A = V_{0x} \\ v_y(t) = -gx0 + B = V_{0y} \end{cases}$$

On obtient les coordonnées V_{0X} et V_{0y} par projection du vecteur $\overrightarrow{v_0}$ sur les axes du repère : $V_{0x} = V_0.\cos(\alpha)$ et $V_{0y} = V_0.\sin(\alpha)$
On a donc : $A = V_0.\cos(\alpha)$ et $B = V_0.\sin(\alpha)$
Soit :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = V_0.\cos(\alpha) \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -gt + V_0.\sin(\alpha) \end{cases}$$

2. Etablir les équations horaires relatives au vecteur position de la flèche.

On obtient les coordonnées du vecteur position par intégration de la vitesse :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t} + \mathrm{C} \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} + \mathrm{D} \end{cases}$$

Détermination des constantes C et D

A t = 0 $x(0) = 0$ et $y(0) = h$ soit C = 0 et D = h

Il vient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} + h \end{cases}$$

3. A quelle distance de O se trouve Groulouk, lorsque la flèche le touche ?
   On cherche à déterminer la valeur de x au point C.
   On va d'abord déterminer la date, t, à laquelle la flèche touche le dos de Groulouk (y = 0)
   On peut déterminer cette valeur en utilisant l'équation horaire y(t) et en déterminant l'instant où le boulet touche le sol.
   $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t}$ + h soit
   $-\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} + \mathrm{h} = 0$
   Cette équation du second degré admet deux solutions, on ne retiendra que la solution positive. :
   L'équation s'écrit : $-4{,}9t^2 + 27{,}4t + 15 = 0$
   Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 27{,}4^2 - 4x(-4.9)x15 = 1043$
   Solution 1 : t = $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ = -0.5 s Cette solution est à éliminer (Même avec une intervention de Gandalf, la flèche de Légolas n'arrivera pas au but avant d'être partie.)
   Solution 2 : t = $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ = 6.1 s Cette solution est à conserver.

Détermination de x_A

On utilise l'équation horaire suivante : $x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t}$

Soit x_A = 80 x cos (20) x 6,1 = 459 m = $4{,}6.10^2$ m

4. La flèche parvient-elle à transpercer la brigandine du chef orc ?
   Pour le savoir, il faut déterminer la valeur de la vitesse à t = 6.1s.

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = V_0.\cos(\alpha) = 75{,}2 \\ v_y(t) = -gt + V_0.\sin(\alpha) = -32{,}4 \end{cases}$$

Valeur de la vitesse : v = $\sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$ = 82 $m.s^{-1}$

La brigandine a sauvé Groulouk ! La bataille continue…