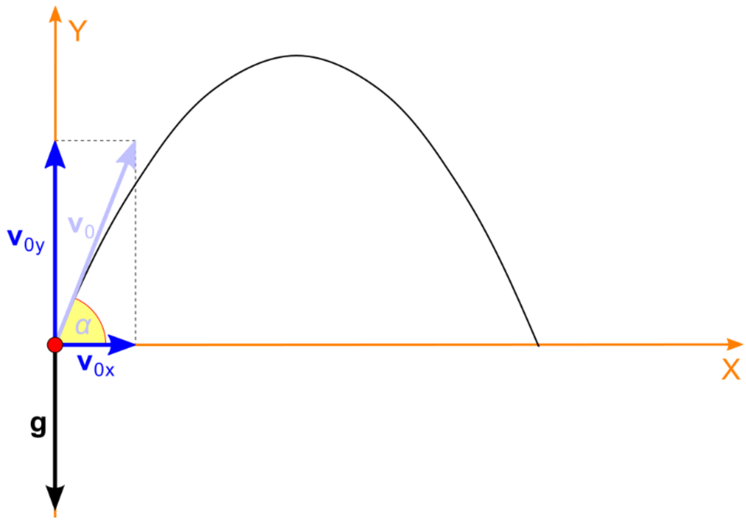
Exercice n°1

L’armée des gobelins vient assiéger la cité elfique de Sélunil. Le chef gobelin Snarrag fait installer une catapulte à 200 m du rempart de la ville. Ce dernier est haut de 20 m.

Il fait tirer un premier boulet par Snokk le chef artilleur. Ce dernier n’est pas très doué, il choisit le réglage de sa machine de guerre un peu au hasard : le boulet est propulsé avec une vitesse initiale de $v_0 = 60$ m.s^{-1} en faisant un angle $\alpha = 70°$ avec l’horizontale.

On peut considérer que le point de départ du boulet correspond à l’origine du repère, les frottements et la poussée d’Archimède sont négligés.



Le boulet tombe-t-il en avant le rempart, frappe-t-il le rempart ou passe-t-il au-delà du rempart ?

1. Etablir les équations horaires de la vitesse et de la position du boulet.
2. Calculer l’abscisse x_A du boulet lorsqu’il heurte le sol.
3. Calculer l’altitude du boulet à l’abscisse x = 200 m.
4. Conclure.

Corrigé

Pour tout l’exercice, on travaillera dans un repère Oxy. On nomme G le centre du boulet.

1. Etablir les équations horaires de la vitesse et de la position du boulet.
   Le système (boulet) est un projectile évoluant dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n’est soumis qu’à son poids.

   ### Application de la seconde loi de Newton : $\vec{P} = m.\vec{a}$

   Il vient : $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ et $\vec{g} = \vec{a}$

Etablissement des équations horaires :

Vecteur accélération : $\vec{a}(t)$ $\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \end{cases}$

On obtient les coordonnées du vecteur vitesse par intégration :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = A \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -gt + B \end{cases}$$

Détermination des constantes A et B

A t = 0 $\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0}$ soit

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = A = V_{0x} \\ v_y(t) = -gx0 + B = V_{0y} \end{cases}$$

On obtient les coordonnées V_{0X} et V_{0y} par projection du vecteur $\overrightarrow{v_0}$ sur les axes du repère : $V_{0x} = V_0.\cos(\alpha)$ et $V_{0y} = V_0.\sin(\alpha)$

On a donc : $A = V_0.\cos(\alpha)$ et $B = V_0.\sin(\alpha)$

Soit :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = V_0.\cos(\alpha) \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -gt + V_0.\sin(\alpha) \end{cases}$$

On obtient les coordonnées du vecteur position par intégration :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t} + \mathrm{C} \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} + \mathrm{D} \end{cases}$$

Détermination des constantes C et D

A t = 0 $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ soit C = 0 et D = 0

Il vient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} \end{cases}$$

2. Calculer l'abscisse x_A du boulet lorsqu'il heurte le sol.
   Lorsque le boulet touche le sol, on a y = 0.
   On peut déterminer cette valeur en utilisant l'équation horaire y(t) et en déterminant l'instant où le boulet touche le sol.

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t}$ soit

$-\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t} = 0$

Soit $t(-\frac{1}{2}\mathrm{gt} + V_0.\sin(\alpha)) = 0$

Cette équation admet deux solutions : t = 0 qui correspond à l'instant du lancer et $-\frac{1}{2}\mathrm{gt} + V_0.\sin(\alpha) = 0$ soit $\mathrm{t} = \frac{2V_0.\sin(\alpha)}{g}$

Application numérique :

$\mathrm{t} = \frac{2V_0.\sin(\alpha)}{g} = 11{,}5$ s

Détermination de x_A

On utilise l'équation horaire suivante : $x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t}$

Soit x_A = 60 x cos (70) x 11,5 = 236 m

3. Calculer l'altitude du boulet à l'abscisse x = 200 m.
   Détermination de t à x = 200m
   $x(t) = V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t}$ donc $V_0.\cos(\alpha).\mathrm{t} = 200$ et $\mathrm{t} = \frac{200}{V_0.\cos(\alpha)} = 9{,}75$s

   Il suffit de déterminer la valeur de y à t = 9.75 s
   Soit : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin(\alpha).\mathrm{t}$
   Il vient : y = -0,5 x 9,8 x (9,75) ² + 60 x sin(70) x 9,75 = 84 m
4. Conclure.
   Le boulet passe largement au-dessus du rempart de 20 m et atterrit dans la cité, 36 mètres plus loin.